Combinatoire du Logarithme et Renormalisation en Physique

Abdelmalek Abdesselam, L.A.G.A.,
Université Paris XIII et C.N.R.S.

Plan :

I - Renormalisation

II - Log $(1+x)$

Ref : A.A., Thèse Ecole Polytechnique 11/6/1997

I – Renormalisation :

- Domaines de la physique concernés :

Physique des particules, physique statistique, physique du solide ...

- Problème mathématique n°1 de la physique $\geqslant 1950$:

Etude de certaines Intégrales fonctionnelles (Feynman Path Integrals) i.e. moyenne % à $N \to \infty$ degrés de liberté (variables aléatoires).

- Exemple :

$$\int_\Omega \mathcal{D}\phi \quad \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\, \exp\left[-\int_{\mathbb{R}^d} d^dx \left(\tfrac{1}{2}\nabla\phi(x)^2 + \mu\,\phi(x)^2 + \lambda\,\phi(x)^4\right)\right]$$

$\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ "fonction" aléatoire dans Ω

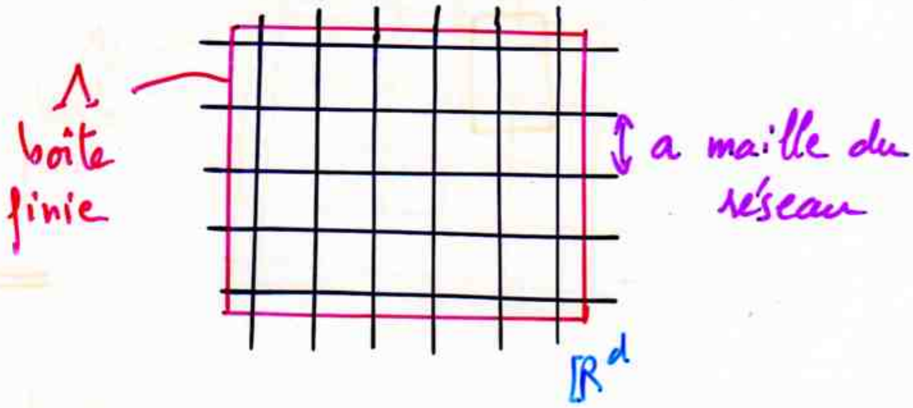
$\mathcal{D}\phi$ = "mesure de Lebesgue sur Ω"
$= \text{"} \prod_{x\in\mathbb{R}^d} d[\phi(x)] \text{"}$

$x_1, \ldots, x_n$ collection de points dans $\mathbb{R}^d$.

Ici N = "Card$(\mathbb{R}^d)$". En fait "comptage" des degrés de liberté plus subtil :

- Groupe de renormalisation (K. Wilson)
- Développements dans l'espace des phases en Théorie constructive des champs (J. Glimm, A. Jaffe)

- **Régularisation :** $\mathbb{R}^d \to (a\mathbb{Z})^d \cap \Lambda$



- gradient ∇ $\to$ gradient aux différences finies
- $\int_{\mathbb{R}^d} d^d x$ $\to$ sommes de Riemann

- **Problème :** Contrôler les limites $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^d$, $\boxed{a \to 0}$

- **Renormalisation Perturbative :** On développe en λ

  $\Rightarrow$ Famille infinie de séries formelles en λ

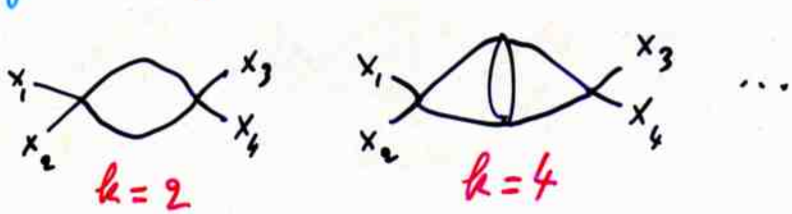
$$\left(F_{i,a}(\lambda)\right)_{i\in I,\, a>0} \quad , \quad F_{i,a}(\lambda) = \sum_{k\geq 0} c_{i,a,k}\, \lambda^k$$

- **CATASTROPHE :**

  Pour presque tous les i et k, $\lim_{a\to 0} c_{i,a,k}$ diverge.

- Chaque $c_{i,a,k}$ somme finie de termes appelés Diagrammes de Feynman $\simeq$ Intégrales divergentes quand $a \to 0$.

ex : $n=4$



. MIRACLE : (=: Renormalisation)

$$\left\{\begin{array}{l} \exists\, i_0 \in I \text{ tq } \quad F_{i_0,a}(\lambda) = \boxed{\lambda} + c_{i_0,a,2}\,\lambda^2 + \ldots \\ \text{et } \underline{\underline{\forall i \in I}}, \\ \qquad F_{i,a} \circ F_{i_0,a}^{-1}(\lambda) = \sum_{k \geq 0} d_{i,a,k}\, \lambda^k \\ \text{vérifie } \underline{\underline{\forall k \geq 0}} \\ \qquad \lim_{a \to 0} d_{i,a,k} \quad \text{converge} \end{array}\right.$$

- $d_{i,a,k}$ s'exprime comme $c_{i,a,k}$ intégrales (diagrammes de Feynman) divergentes → leurs "parties finies".
- Heuristique : Tomonaga, Feynman, Schwinger, Dyson, ...
- Théorèmes : Bogoliubov, Parasiuk, Hepp, Zimmermann, ...

II Log(1+x) :

Développement de Mayer en Physique Statistique et en Théorie Constructive des Champs

. Problème : Λ ensemble fini fixé.

Y partie $\neq \emptyset$ de Λ = polymère

Calculer dans $\mathbb{C}[[\{A(Y)\}_{Y \text{ polymère } \subset \Lambda}]]$

variable associée à Y

amplitude

$\log Z$ où

$$Z = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{Y_1, \dots, Y_n \\ \text{DISJOINTS}}} A(Y_1) \dots A(Y_n)$$

$$\to \quad \log Z = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{Y_1, \dots, Y_n} \Psi(Y_1, \dots, Y_n)\, A(Y_1) \dots A(Y_n)$$

$\boxed{\Psi(Y_1, \dots, Y_n)}$: Coefficient de Mayer $(\in \mathbb{Z})$

. Graphe d'intersection : sur $\{1, \dots, n\}$ = ensemble des noms

$$G = \{ \text{paires } \{i,j\} \text{ tq } Y_i \cap Y_j \neq \emptyset \}$$

$$\to \quad \Psi(Y_1, \dots, Y_n) = \sum_{\substack{H \subset G \\ H \text{ connecte } \{1, \dots, n\}}} (-1)^{|H|}$$

- $\Psi(Y_1, \dots, Y_n)$ nul si G ne connecte pas $\{1, \dots, n\}$.
- Π_G ens. des partitions π de $\{1, \dots, n\}$ tq

  $\forall B \in \pi$, $G|_B$ connecte B.

  $\pi_1 \leq \pi_2 \iff \pi_1$ plus fine que π_2

  0 partition en singletons, 1 partition à un bloc,

  $\to$ $\underline{\Pi_G}$ <u>treillis de partitions</u>.

$$\underline{\Psi(Y_1, \dots, Y_n) = \mu_{\Pi_G}(0, 1)} \quad \text{Fonction de Moebius}$$

- $G \sim$ sous-arrangement de l'arrangement d'hyperplans $\mathcal{A}_{n-1}$

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_i = x_j\}$$

- <u>Calcul de $\Psi(Y_1, \dots, Y_n)$ par renormalisation (A. A. 1997):</u>

  $\mathcal{M} = (Y_1, \dots, Y_n)$ configuration de Mayer = suite qcq de polymères

on resoud $\quad 1 = e^{-\sum_{\mathcal{M}} \mathcal{C}(\mathcal{M})} Z \quad$ (condition de renormalisation du vide).

$\mathcal{C}(\mathcal{M})$ = inconnue = contre-terme du vide

- Ansatz $$\mathcal{C}(\mathcal{M}) = \frac{\Psi(\mathcal{M})\,\mathcal{A}(\mathcal{M})}{\sigma(\mathcal{M})}$$

$\sigma(\mathcal{M}) = n!$ facteur de symetrie

$\mathcal{A}(\mathcal{M}) = A(Y_1)\dots A(Y_n)$ amplitude

- On développe

$$1 = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{r\geq 0} \frac{1}{r!} \sum_{\substack{Y_1,\dots,Y_n \\ \text{disjoints}}} \sum_{\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_r} A(Y_1)\dots A(Y_n)$$

$$\times \; (-\mathcal{C}(\mathcal{M}_1))\dots(-\mathcal{C}(\mathcal{M}_r))$$

- <u>CONCATENATION:</u> ($\sim$ Coproduit des Alg. de Hopf
Alg. d'incidence)

$$\mathcal{M}_{big} = (Y_1,\dots,Y_n, \underbrace{Y_1^1,\dots,Y_{m_1}^1}_{\mathcal{M}_1}, \dots, \underbrace{Y_1^r,\dots,Y_{m_r}^r}_{\mathcal{M}_r})$$

- On regroupe par valeurs de $\mathcal{M}_{big}$
- On symetrise sur l'ordre des éléments de $\mathcal{M}_{big}$
- Identification des coéfficients pour chaque monôme dans les variables $A(Y)$.

$$\rightarrow \quad \Psi(\mathcal{M}) = \sum_{W} \prod_{V \in W} \left(-\Psi(\mathcal{M}_V)\right)$$

($\approx$ Induction de Bogoliubov)

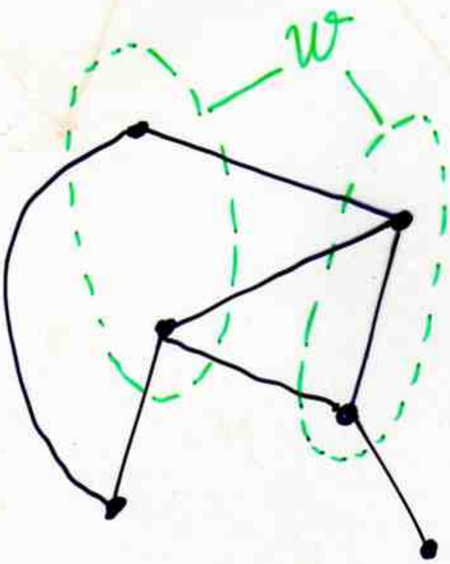
. W ensemble de parties propres disjoints de $\{1, \dots, n\}$

tq $i \neq j$ dans $\left(\bigcup_{V \in W} V\right)^c \Rightarrow Y_i \cap Y_j = \emptyset$

. si $V = \{i_1, \dots, i_k\}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$

$$\mathcal{M}_V = (Y_{i_1}, \dots, Y_{i_k}).$$

exemple :



$n = 6$

$\mathcal{M} = (Y_1, \dots, Y_6)$

point $\in \{1, 2, \dots, 6\}$

i — j $\in$ graphe G

$\Leftrightarrow$ $Y_i \cap Y_j \neq \emptyset$

Solution de l'Induction :

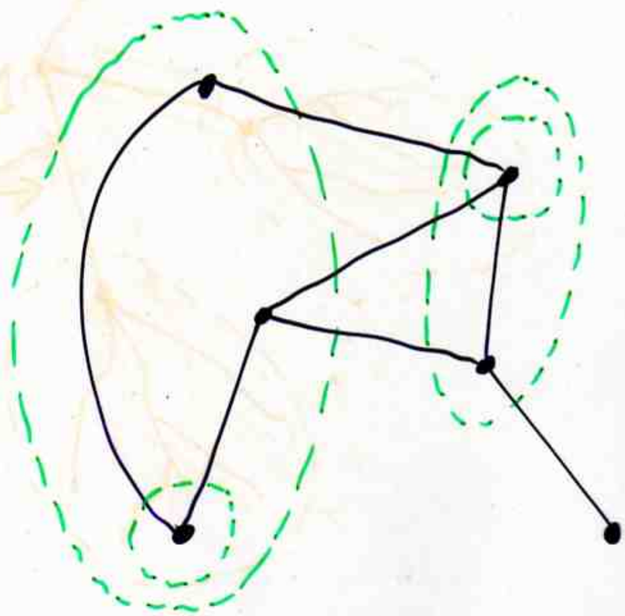
$$\Psi(\mathcal{M}) = \sum_{\mathcal{F}} (-1)^{|\mathcal{F}|}$$

($\approx$ Formule de Forêt de Zimmermann)

$\mathcal{F}$ forêt admissible

- $\mathcal{F}$ ensemble de parties propres, disjointes ou emboîtées de $\{1,\dots,n\}$, (Forêt)
  tq tous les liens de G coupés par $\mathcal{F}$ (admissible)

- exemple :

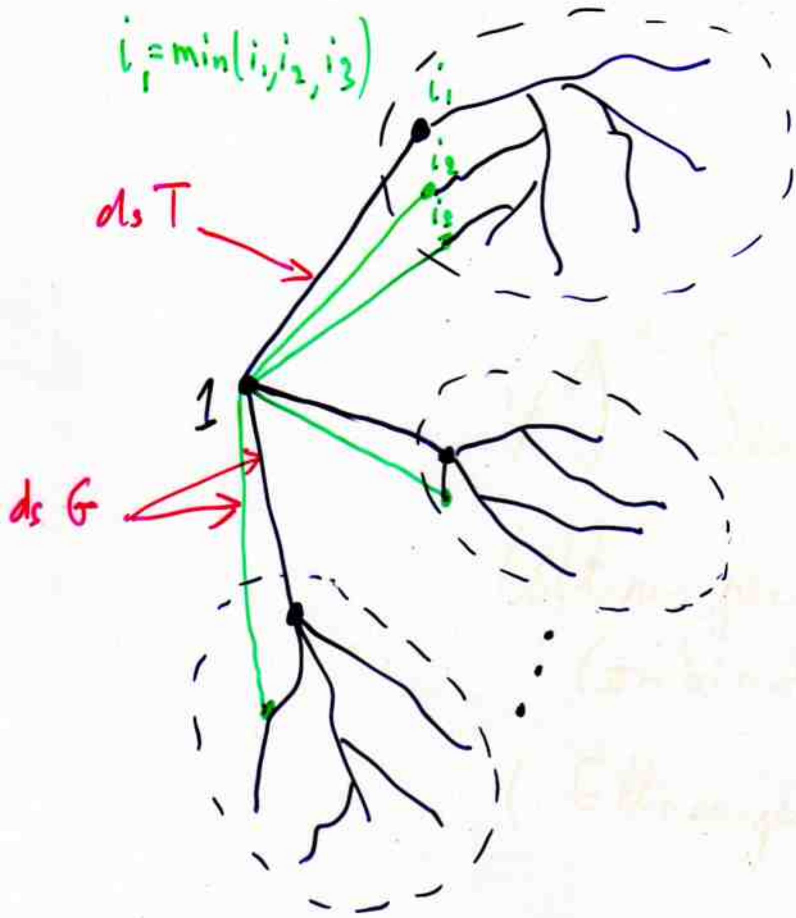


$n = 6$
$|\mathcal{F}| = 4$

- On peut réduire $(1 + (-1) = 0)$ la somme sur les forêts à une somme sur des arbres (~ Théorème des circuits rompus de Rota).

$$\Psi(\mathcal{M}) = \sum_{T \text{ admissible}} (-1)^{\overbrace{|T|}^{= n-1}}$$

T arbre de Cayley connectant $\{1,\dots,n\}$, contenu dans G + autres conditions



Remarque si G graphe complet sur $\{1,\dots,n\}$

$$\Psi(y_1,\dots,y_n) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

en effet

$$\log(1+x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\boxed{(-1)^{n-1}(n-1)!}}{n!}\, x^n$$

Fin